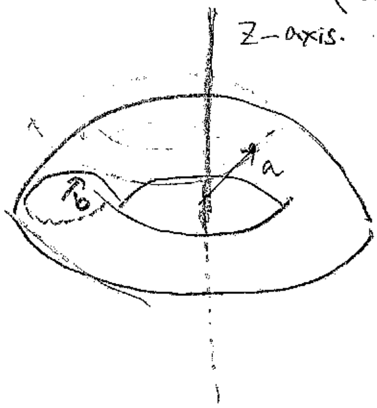
$\mathbb{R}^n$ 中的几何对象（$\mathbb{R}^n$的子空间）

<1> $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\cos t \quad y=\sin t\}$

<2> $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a\cos t \quad y=b\sin t,\ t\in\mathbb{R}\}$

<3> $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\cos\varphi\cos\theta \quad y=\cos\varphi\sin\theta,\ z=\sin\varphi,\ \theta,\varphi\in\mathbb{R}\}$

<4> $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\varphi\\a\sin\varphi\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\cos\theta\cos\varphi\\b\cos\theta\sin\varphi\\b\sin\theta\end{pmatrix} \quad \theta,\varphi\in\mathbb{R}\right\}$



<5> $\{(x,y) \mid x^2+y^2=r^2\}$

<6> $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r\}$

<7> $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r\}$

<8> $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

映射与子空间

<1>' 定义映射 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

<2>' $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$$

<3>' $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\theta, \varphi) \longmapsto (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$$

<4>' $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ……

几何对像 <1>—<4> 分别为映射 <1>'—<4>' 的像

纤维 (fibre)；完全反像

定义：给出集合 A, B, 映射 $f: A \to B$, 一点 $b \in B$, f 在 b 点的纤维 $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$

例子：报数问题

① 军训, 列队, 报数　$A = \{2019$ 级数学学院的同学$\}$

f: 1,2,3 报数　$B = \{1, 2, 3\}$　$f^{-1}(3) = ?$

例② $A=\mathbb{R}$ $B=\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^3$

$f^{-1}(0)=?$ $f^{-1}(1)=?$

③ $A=\mathbb{C}$, $B=\mathbb{C}$ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$x\mapsto x^3$

$f^{-1}(0)=?$ $f^{-1}(1)=?$

④ $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto x$

$f^{-1}(a)=?$

纤维簇. 丛

<5>' 定义 $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto x^2+y^2$ $f^{-1}(r)=?$

<6>' 定义 $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $f^{-1}(r)=?$

<7>' ⋯

<8>' 子集的完全反像.

可见，我们可以把研究子空间的问题转化为研究映射的问题.

定义：给出 $v_1, v_2, \cdots v_k \in \mathbb{R}^n$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$

称 $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k \in \mathbb{R}^n$ 为 $v_1, \cdots, v_k$ 的一个线性组合

例 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c_1 = 1$ $c_2 = 2$，求 $c_1v_1 + c_2v_2$

定义：$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个映射.

如果：$\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$，$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$，我们均有

$$T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2)$$

则称 T 是一个线性映射.

例：① 验证 $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，$x \longmapsto 2x$ 是线性映射.

② 验证 $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2x+3y$ 是线性映射.

③ 验证 $T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2)$ 等价于

$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ 且 $T(cv) = cT(v)$.

④ 给定角度φ，$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto$ 把向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$绕原点逆时针旋转角度$\varphi$.

验证 T是线性映射.

⑤ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto$ 沿x轴反射.

⑥ 沿原点反射.

⑦ 放缩k倍

证明：$T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$，$T_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ 均为线性映射 则

$T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 为线性映射.

线性映射与矩阵

令 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots$ $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

任何一个向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 都可以被表示为

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

令 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为一个线性映射.

则 $T(x)=T(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)$

$$=x_1T(e_1)+\cdots+x_nT(e_n)$$

upshot: 如果 $T(e_1),\cdots,T(e_n)$ 被确定了, 则对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, $T(x)\in\mathbb{R}^m$ 就被确定了.

定义 $m\times n$ 阶矩阵 $[T(e_1)\ \ T(e_2)\ \cdots\ T(e_n)]$ 为线性变换 T 的矩阵 我们可以把它记为 A_T

练习: 确定 ①—⑦中的线性变换的矩阵

$T(x)=x_1T(e_1)+\cdots+x_nT(e_n)$. 即 $T(x)=A_T$ 的列与 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合. 这提示我们可以做如下定义:

令 A 为一个 $m\times n$ 阶矩阵, $x\in\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$. 定义矩阵与向量的乘积 Ax 为

$$Ax=x_1a_1+\cdots+x_na_n=$$